非可換エルゴード理論 (作用素環研究会報告集)

荒木, 不二洋

数理解析研究所講究録
49巻 1968年 101-125

非可換エルゴード理論

京大 数研 荒木不二洋

無限系の統計力学の枠としてC^*環の理論が考えられ、最近この枠の中で非可換エルゴード理論と称するものが展開されている。その統計力学的背景については別の研究会で述べたので、ここでは作用素環的測面に限って、現在まで知られていることをまとめてみる。エルゴード状態の特徴ずけと任意状態のエルゴード状態への分解が主な内容である。

目 次

§1. 群上の平均

1.1 Godement平均

G：局所コンパクト群

$\mathcal{B}(G)$：G上有界複素数値関数のC^*環，$\|f\|=\sup|f(g)|$。

$\mathcal{C}(G)$：G上連続有界複素数値関数のC^*環，$\subset\mathcal{B}(G)$。

$\mathcal{C}_0(G)$：$f\in\mathcal{C}(G)$，$\lim_{g\to\infty} f(g)=0$　のようなf全体，

$\mathcal{P}(G)$：G上連続正型複素数値関数．正型とは

$$\sum C_i^* C_j f(g_i^{-1} g_j) \geqq 0$$

$\mathcal{V}(G)$：$\mathcal{P}(G)$の元の線形結合全体，

$\overline{\mathcal{V}}(G)$：$\mathcal{V}(G)$の$\mathcal{B}(G)$における閉包，$C^*$環。

$AP(G)$：G上概周期関数のC^*環．すなわち，$f(g)=(\Phi_1, U(g)\Phi_2)$（$U$は$G$の有限次元表現，$\Phi_1$，$\Phi_2$は表現空間のベクトル）全体のノルムによる閉包，

R_s，L_s：$R_s f(g)\equiv f(s^{-1}g)$，　$L_s f(g)\equiv f(gs)$。

Rf：$R_s f$，$s\in G$の凸閉包，

$\overline{R}f$：Rfの$\mathcal{B}(G)$におけるノルムによる閉包，

Lf，$\overline{L}f$も同様

$\mathcal{E}$　：$\overline{R}f$，$\overline{L}f$がともに定数関数を含むようなf全体，

$M(f)$：Godement平均．$\overline{R}f\cup\overline{L}f$に含まれる定数関数の値，

定理1　(a)　$f\in\mathcal{E}$に対し$M(f)$は一意的にきまり，次の性

質をもつ。

(a1) $\mathcal{E}$ は $\mathcal{B}(G)$ で閉じていて，$|M(f)| \leqq \|f\|$

(a2) $f \in \mathcal{E}$ なら，f^*, αf, $R_g f$, $L_g f \in \mathcal{E}$ $(\alpha \in C, g \in G)$

$M(f)^* = M(f^*)$, $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, $M(R_g f) = M(L_g f) = M(f)$。

(a3) $f \in \mathcal{E}$, $f \geqq 0$ なら $M(f) \geqq 0$

(b) $\overline{V}(G) \subset \mathcal{E}$, M は $\overline{V}(G)$ の R_g, L_g 不変状態。

(c) $f \in \overline{V}(G)$ に対し，次の分解が一意的に存在する。

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in AP(G), \quad M(|f_2|^2) = 0$$

$f \in V(G)$ に対し，G のユニタリ表現 U_f，表現空間のベクトル Ψ_1, Ψ_2 が存在して

$$f_1(g) = (\Psi_1, \; U_f(g) E_f^F \Psi_2)$$
$$f_2(g) = (\Psi_1, \; U_f(g)(1 - E_f^F) \Psi_2)$$

ただし

E_f^F：表現 U_f の有限次元不変部分空間への射影子を含む最小の射影子。

$f \in \mathcal{P}(G)$ の場合，$f(g) = (\Psi_f, U_f(g) \Psi_f)$ となる巡回ベクトル Ψ_f をもつ表現 U_f に対して，次の条件は同等である。

(i) U_f が 0 以外 G の有限次元表現を含まない。

(ii) $M(|f|^2) = 0$

(iii) $M(|f|)=0$

(d) 次の性質をもつコンパクト群$\overline{G}$が存在する。

(d1) Gから$\overline{G}$の中への準同型πが存在して$\overline{\pi G}=\overline{G}$

(d2) $f\in AP(G)$に対し$\pi^*f\in \mathcal{C}(\overline{G})$が存在して$\pi^*f(\pi g)=f(g)$, かつ$\pi^*$は$AP(G)$と$\mathcal{C}(\overline{G})$の同型対応(onto)を与える。

(d3) $M(f)=\int_{\overline{G}}\pi^*f(\bar{g})\,dm(\bar{g})\quad(f\in AP(G))$, ここに$m$は$\overline{G}$の規格化された不変測度。

1.2 平均エルゴード定理

$U(g)$: Gのヒルベルト空間H上のユニタリ表現。

E^F : Hの有限次元不変部分空間をすべて含む最小の射影子。

U^E : UのE^FHへの制限。

S_e : Gの既約表現全体。

$U^\sigma(g)$: $\sigma\in S_e$に対する表現演算子。

H^σ : $\sigma\in S_e$の表現空間, 次元はd_σとする。

U^Eの既約分解 $\begin{cases} E^FH=\sum\limits_{\sigma\in S_e}^{\oplus} H^\sigma\otimes H'^\sigma \\ U^E(g)=\sum\limits_{\sigma\in S_e}^{\oplus} U^\sigma(g)\otimes 1'_\sigma \end{cases}$

E^σ: Hにおける$H^\sigma\otimes H'^\sigma$への射影子。

定理2　(a)　$f \in \mathcal{V}(G)$ に対し，次式をみたすH上有界作用素$M(fU)$が一意的に存在する。

$$(\Phi_1,\ M(fU)\Phi_2) = M\{f(g)\cdot(\Phi_1,\ U(g)\Phi_2)\} \quad \forall \Phi_1, \Phi_2 \in H$$

(b)　$\| M(fU) \| \leqq \| f \|$

(c)　$f(g) = (\Phi_1,\ U_f(g)\Phi_2)$，$U_f$と$U^E$が部分表現を共有しなければ，$M(fU) = 0$。

(d)　$M\{(\Phi_1^\sigma,\ U^\sigma(g)\Phi_2^\sigma)^* U(g)\} = d_\sigma^{-1}\{P_{12} \otimes 1'_\sigma\}E^\sigma$

ただし，$\Phi_1^\sigma,\ \Phi_2^\sigma \in H^\sigma$，$P_{12}\Phi = (\Phi_2^\sigma,\ \Phi)\Phi_1^\sigma$　$(\forall \Phi \in H^\sigma)$。

$M(U) = E^0$（不変ベクトル全体への射影）。

1.3　柔順群と不変平均

定理3　次のいずれかの条件をみたす$\mathcal{C}(G)$の状態ηの存在は，与えられたGに対し同等である。

(1)　$\eta(f(hg)) = \eta(f(g))$，$\forall h \in G$　　左側不変平均

(2)　$\eta(f(gh)) = \eta(f(g))$，$\forall h \in G$　　右側不変平均

(3)　上記二条件が同時に成立　　　　(両側)不変平均

定義　不変平均ηをもつ局所コンパクト群を柔順群という。

定理4　柔順群に対しては，任意の不変平均ηは$\mathcal{E}$上Mに一致する。Gが非コンパクトならηは$\mathcal{C}_0(G)$上0である。

$\mathfrak{A}$：C^*環。　$\mathfrak{A}^*$：$\mathfrak{A}$の位相的共軛空間。

$\mathcal{C}(G,\mathfrak{A})$：G上$\mathfrak{A}$値弱有界弱連続関数全体。すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G,\mathfrak{A}),\ \Phi \in \mathfrak{A}^* \Rightarrow (\Phi, X(g)) \in \mathcal{C}(G)$$

このとき，$\|X\| \equiv \sup \|X(g)\| < \infty$。

$\mathfrak{A}^{**}$　：$\mathfrak{A}$のenveloping W^*環

$\mathcal{L}(H)$：ヒルベルト空間H上の有界作用素全体。

$\mathcal{C}(G,H)$：G上$\mathcal{L}(H)$値有界弱連続関数全体，すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G,H),\ \Phi_1, \Phi_2 \in H \Rightarrow (\Phi_1, X(g)\Phi_2) \in \mathcal{C}(G),$$

$$\|X\| \equiv \sup \|X(g)\| < \infty。$$

定理5　(a)　$\mathcal{C}(G)$の状態（G上の平均という）ηに対し，次式をみたす$\mathcal{C}(G,\mathfrak{A})$から$\mathfrak{A}^{**}$への写像$\tilde{\eta}$が一意的に存在する。$X \in \mathcal{C}(G,\mathfrak{A})$に対し，

$$(\Phi, \tilde{\eta}(X)) = \eta\{(\Phi, X(g))\},\ (\forall \Phi \in \mathfrak{A}^*)$$

この$\tilde{\eta}$は次の性質をもつ。

(1)　Xにつき線形。

(2)　有界，$\|\tilde{\eta}(X)\| \leqq \|X\|$。

(3)　正，すなわち　$X(g) \geqq 0\ (g \in G) \Rightarrow \tilde{\eta}(X) \geqq 0$，

(4)　$\tilde{\eta}(A) = A$，$\tilde{\eta}(AX) = A\tilde{\eta}(X)$，$\tilde{\eta}(XA) = \tilde{\eta}(X)A\ (\forall A \in \mathfrak{A})$。

(b)　Gが非コンパクト，柔順でηが右側不変なら，

$$\lim_{g\to\infty} (\Phi, X(g)) = 0\ (\Phi \in \mathfrak{A}^*) \Rightarrow \tilde{\eta}(X) = 0$$

(c) $\mathcal{C}(G)$の状態ηに対し次式をみたす$\mathcal{C}(G,H)$から$\mathcal{L}(H)$への写像$\tilde{\eta}$が一意的に存在する。$X \in \mathcal{C}(G,H)$に対し，

$$(\Psi_1, \tilde{\eta}(X)\Psi_2) = \eta\{(\Psi_1, X(g)\Psi_2)\} \quad (\Psi_1, \Psi_2 \in H)$$

この$\tilde{\eta}$は次の性質をもつ。

(1) Xにつき線形。

(2) 有界，$\|\tilde{\eta}(X)\| \leq \|X\|$。

(3) 正，すなわち，$X(g) \geq 0 \quad (g \in G) \Rightarrow \tilde{\eta}(X) \geq 0$。

(4) $\tilde{\eta}(A) = A$, $\tilde{\eta}(AX) = A\tilde{\eta}(X)$, $\tilde{\eta}(XA) = \tilde{\eta}(X)A \quad (\forall A \in \mathcal{L}(H))$。

(5) $\tilde{\eta}(X) \in \{X(g);\ g \in G\}''$

(d) Gが柔順局所コンパクト群，$U(g)$がH上Gの連続ユニタリ表現，E^0をG不変ベクトル全体への射影子とすると，

$$\tilde{\eta}(U(g)) = E^0。$$

χがGの連続指標，E^χを$U(g)\Psi = \chi(g)\Psi$のようなベクトルΨ全体への射影子とすると，

$$\tilde{\eta}(\chi^* U(g)) = E^\chi。$$

1.4 Mフィルター

$\{\alpha\}$：フィルター

f_α：G上可測関数

定義　$\{f_\alpha\}$が次の三條件をみたすとき右Mフィルターとい

う。

(1) $f_\alpha(g) \geqq 0$

(2) $\int f_\alpha(g)\, d\mu(g) = 1$

(3) $\lim_\alpha \int d\mu(g)\, |f_\alpha(g) - f_\alpha(gg')| = 0 \qquad \forall g' \in G$

ここにμは右側不変測度である。同様に左Mフィルターも定義される。

定理6　右Mフィルター f_α に対し，極限

$$\eta_f(h) = \lim_\alpha \int f_\alpha(g)\, h(g)\, d\mu(g)$$

が存在するときはそれを与える右側不変平均が存在する。

例　Van Hove 平均。　$G = \mathbb{R}^n$, $\{\Lambda_k \subset \mathbb{R}^n,\ k = 1, 2, \cdots\}$

に対し

$$v_a^+(\Lambda) \equiv \{g\,;\ \Lambda \cap (S_a + g) \neq \phi\} \text{ の体積}$$

$$v_a^-(\Lambda) \equiv \{g\,;\ \Lambda \supset S_a + g\} \text{ の体積}$$

ただし S_a は原点中心半径 a の球

$$\lim_k v_a^+(\Lambda_k) / v_a^-(\Lambda_k) = 1 \qquad (\forall a)$$

のとき $\Lambda_k \to \infty$ と定義する。$v(\Lambda)$ を Λ の体積とすると，

$$\lim_{\Lambda \to \infty} V(\Lambda)^{-1} \int_\Lambda dx\, h(x)$$

は上の意味で不変平均を与える。

定義　G上$\mathcal{L}(H)$値可測関数Xに対し，次式をみたす$\overline{X}_f^w$，$\overline{X}_f^s$，$\overline{X}_f^u$ $\in \mathcal{L}(H)$が存在すれば，それぞれXの弱平均，強平均，一様平均という．

$$\lim_\alpha \left(\Phi_1, \left[\int f_\alpha(g) X(g) d\mu(g) - \overline{X}_f^w \right] \Phi_2 \right) = 0, \quad \Phi_1, \Phi_2 \in H$$

$$\lim_\alpha \left\| \left[\int f_\alpha(g) X(g) d\mu(g) - \overline{X}_f^s \right] \Phi \right\| = 0, \quad \Phi \in H$$

$$\lim_\alpha \left\| \int f_\alpha(g) X(g) d\mu(g) - \overline{X}_f^u \right\| = 0$$

もし存在すれば，いずれも$\hat{\eta}_f(X)$と一致する．

定理７　UがGの連続表現，f_αが右Mフィルター，χがGの連続指標，E^χを$U(g)\Phi = \chi(g)\Phi$のようなベクトルΦ全体への射影とすると，$\chi(g)^* U(g)$のf_αによる強平均が存在して，E^χに等しい．特に，$U(g)$のf_αによる強平均が存在して，E^0に等しい．

§2　C^*環の自己同型による群の表現

2.1　基礎的定義

τ：$\mathfrak{A}$の自己同型によるGの表現　$g \in G \longrightarrow \tau_g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$

τが強連続とは　$\lim_{g \to 1} \| \tau_g A - A \| = 0 \qquad \forall A \in \mathfrak{A}$

τが一様連続とは　$\lim_{g \to 1} \sup_{\|A\| \leq 1} \| \tau_g A - A \| = 0$

以下強連続を単に連続という．

共変表現とは，ヒルベルト空間H上の$\mathfrak{A}$の表現π，Gのユニタリ表現Uの組で，次式をみたすもの．

$$U(g)\pi(A)U(g)^{-1} = \pi(\tau_g A)$$

以下$U(g)$は連続とする。

$\mathfrak{S}$：$\mathfrak{A}$の<u>状態</u>全体

H_φ, Ω_φ, π_φ：$\varphi\in\mathfrak{S}$に対し $\varphi(A)=(\Omega_\varphi,\ \pi_\varphi(A)\,\Omega_\varphi)$
できまるヒルベルト空間H_φ，$\mathfrak{A}$のH_φ上表現π_φ，巡回ベクトル$\Omega_\varphi\in H_\varphi$の組。

$\mathfrak{S}_0$：<u>不変状態</u>全体。すなわち$\varphi\in\mathfrak{S}$，$\varphi(\tau_g A)=\varphi(A)$。

U_φ：$\varphi\in\mathfrak{S}_0$に対し，$U_\varphi(g)\pi_\varphi(A)\Omega_\varphi=\pi_\varphi(\tau_g A)\,\Omega_\varphi$
できまるGのユニタリ表現。τが連続ならU_φも連続。

τが<u>漸近可換</u>とは $\lim_{g\to\infty}\|[\tau_g A,B]\|=0 \quad (\forall A,B\in\mathfrak{A})$

τが<u>弱漸近可換</u>とは $\lim_{g\to\infty}\varphi([\tau_g A,B])=0 \quad (\forall A,B\in\mathfrak{A},\ \forall\varphi\in\mathfrak{S})$

H上の表現πが<u>漸近可換</u>とは

$$\lim_{g\to\infty}(\Psi,\ \pi([\tau_g A,B])\Psi)=0 \quad (\forall A,B\in\mathfrak{A},\ \forall\Psi\in H)$$

$\varphi\in\mathfrak{S}$が<u>漸近可換</u>とはH_φ上π_φが漸近可換なこと。

τが<u>η可換</u>とは，Gの右または左不変平均ηに対し，

$$\eta\{\varphi([\tau_g A,B])\}=0 \quad (\forall A,B\in\mathfrak{A},\ \forall\varphi\in\mathfrak{S})$$

H上の表現πが<u>η可換</u>とは，

$$\eta\{(\Psi,\ \pi([\tau_g A,B])\Psi)\}=0 \quad (\forall A,B\in\mathfrak{A},\ \forall\Psi\in H)$$

$\varphi\in\mathfrak{S}$が<u>η可換</u>とは，H_φ上π_φがη可換なこと。

τが<u>M可換</u>とは，任意の$A,B\in\mathfrak{A}$，$\varphi\in\mathfrak{S}$に対し，

$$f(g)\equiv|\varphi([\tau_g A,B])|\in\mathcal{E},\quad M(f)=0.$$

H上の表現πが<u>M可換</u>とは，任意の$A, B \in \mathfrak{A}$，$\Psi \in H$に対して
$$f(g) \equiv |(\Psi, \pi([\tau_g A, B]\Psi)| \in \mathcal{E}, \quad M(f)=0$$
$\varphi \in \mathfrak{S}$が<u>M可換</u>とは，H_φ上π_φがM可換なこと。

漸近可換，τ可換，M可換の定義で　$\varphi \in \mathfrak{S}_0$，$\Psi \in E^0H$等の條件をつける場合もある。

τが表現πで<u>大きい</u>とは，$\mathfrak{A}$の任意の自己共軛元Aに対し，
$$K(A) \equiv \overline{conv}\{\pi(\tau_g A);\ g \in G\}, \quad K(A) \cap \pi(\mathfrak{A})' \neq \phi$$
ここに，$\overline{conv}\{\cdots\}$は$\{\cdots\}$の凸包の弱閉包。

τが$\varphi \in \mathfrak{S}$で<u>大きい</u>とは，π_φで大きいこと。

τが<u>大きい</u>とは任意の$\varphi \in \mathfrak{S}_0$で大きいこと。

共変表現(π, U)が<u>G可換</u>とは，$E^0\pi(\mathfrak{A})E^0$が可換なこと。
ここにE^0は$U(G)$不変ベクトル全体への射影

$\varphi \in \mathfrak{S}_0$が<u>G可換</u>とは，$(\pi_\varphi, U_\varphi)$がG可換なこと。

τがG可換とは，任意の$\varphi \in \mathfrak{S}_0$がG可換のこと。

<u>2.2　相互関係</u>

<u>定理8</u>　(1) τがH上表現πで大きいための必要十分條件は，任意の$\Psi_j \in H$，$n < \infty$，$B_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1 \cdots n)$，$A \in \mathfrak{A}$に対して
$$\inf_{A' \in K(A)} \max_j |(\Psi_j, \pi([A', B_j])\Psi_j)| = 0$$

(2) H上共変表現(π, U)がG可換であるための必要十分条件は，任意の$\Psi \in E^{\circ}H$，$A, B \in \mathfrak{A}$に対して

$$\inf_{A' \in K(A)} |(\Psi, \pi([A', B])\Psi)| = 0$$

$$\left(\inf_{g} |(\Psi, \pi([A, \tau_g B])\Psi)| = 0 \text{ なら十分} \right)$$

定理9

(1) Gが非コンパクト，φが漸近可換 $\Longrightarrow$ φはM可換，τはφで大きい。

(2) Gが柔順，φがM可換 $\Longrightarrow$ φはη可換（η任意）

(3) φがM可換
φがη可換 $\Longrightarrow$ φはG可換．
φでτが大きい

2.3 性質

$\mathcal{R}$：共変表現(π, U)で，$\mathcal{R} \equiv (\pi(\mathfrak{A}) \cup U(G))''$，

$\varphi \in \mathfrak{S}_0$に対しては，$\mathcal{R} \equiv (\pi_\varphi(\mathfrak{A}) \cup U_\varphi(G))''$。

$\mathcal{Z}$：$\mathcal{R}$の中心，

$\mathfrak{C}$：$\overline{\pi(\mathfrak{A})}$の中心　（―は弱閉包）

$\mathfrak{C}_0$：$\mathfrak{C} \cap U(G)'$

定理10　τが共変表現(π, U)で大きく，$\mathfrak{C}_0$が忠実なG不変正規状態があるとする。（特にτが$\varphi \in \mathfrak{S}_0$で大きければ この

条件がみたされる。）このとき $\overline{\pi(\mathfrak{A})}$ から $\mathfrak{C}_0$ への写像 γ で，次の性質をもつものが一意的に存在する。

(1) γ は線形，正，正規（normal）

(2) $\gamma(U(g)AU(g)^{-1})=\gamma(A)$

(3) $\gamma(AB)=\gamma(A)B \quad (B\in\mathfrak{C}_0)$， $\gamma(1)=1$

(4) $\overline{\pi(\mathfrak{A})}$ の任意の正規 G 不変状態 ρ に対し

$$\rho=(\rho|\mathfrak{C}_0)\cdot\gamma$$

(5) $\gamma(A)E^0=E^0AE^0$

定理11 (1) 共変表現 (πU) が η 可換のために

$$m_\eta(A)\equiv\tilde{\eta}\{U(g)AU(g)^{-1}\}\in\mathfrak{C} \quad (\forall A\in\pi(\mathfrak{A}))$$

が必要十分。このとき，$m_\eta(A)\in\mathfrak{C}_0$ である。また $E^0m_\eta(A)=E^0AE^0$。

(2) τ が η 可換であるためには，

$$m_\eta(A)\equiv\tilde{\eta}\{\tau_g A\}\in\mathfrak{A}^{**} \text{ の中心} \quad (\forall A\in\mathfrak{A})$$

が必要十分である。

定理12 $\varphi\in\mathfrak{S}_0$ が M 可換なら，任意の $f\in\overline{V}(G)$，$\Phi_1,\Phi_2\in H_\varphi$，$A\in\mathfrak{A}$ に対して

$$F(g)\equiv f(g)(\Phi_1,\pi_\varphi(\tau_g A)\Phi_2)\in\mathcal{E}$$

このとき $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{C}$ への写像 M_f を

$$(\Phi_1,M_f(A)\Phi_2)=M(F)$$

で定義すると，$f \to M_f$ は線形，正 $(f \geq 0,\ A \geq 0 \Rightarrow M_f(A) \geq 0)$，有界 $(\|M_f(A)\| \leq \|f\|\|A\|)$，で次式をみたす．

$M_f = M_{f_1}$ 　ただし $f = f_1 + f_2$ は定理1(c)の分解．

$M_f(\tau_g^{-1} A) = M_{L_g f}(A)$

$U_\varphi(g) M_f(A) U_\varphi(g)^{-1} = M_{R_g f}(A)$

$M_{f^*}(A) = M_f(A^*)^*$

$M_f(A) BE^0 = BM(fU_\varphi)\pi_\varphi(A)E^0$

$M_1(A) \in \mathfrak{C}_0$ ，　$E^0 M_1(A) = E^0 A E^0$

注意　γ，M_1，$\mathfrak{m}_\eta$ が共通に定義される場合はたがいに等しい。

定理13　任意の共変表現 (π, U) で

$$E^0(E^0\pi(\mathfrak{A})E^0)' = E^0(E^0\pi(\mathfrak{A})'E^0)'' = \mathcal{R}'E^0$$

もし，E^0H が $\pi(\mathfrak{A})$ につき巡回的なら

$$A \in \mathcal{R}' \Longleftrightarrow AE^0 \in \mathcal{R}'E^0$$

は $\mathcal{R}'$ と $\mathcal{R}'E^0$ の同型対応を与える。

定理14　E^0H が $\pi(\mathfrak{A})$ につき巡回的で　共変表現が G 可換なら，定理13の $\mathcal{R}'E^0$ は E^0H で極大可換で　(すなわち $\mathcal{R}'E^0 = (E^0\pi(\mathfrak{A})E^0)''E^0$)，さらに $\mathcal{R}'$ は可換である。

定理15　$\varphi \in \mathfrak{S}_0$が，M可換，$\tau$可換，または，$\tau$が$\varphi$で大きい，のいずれかが成立すれば，$\mathcal{R}' = \mathfrak{C}_0$である。

2.4　共変環

C^*環$\mathfrak{A}$とGの$Aut\,\mathfrak{A}$による連続表現τが与えられたとき，共変C^*環$\mathfrak{A}^G$とは，次の$*$環にC^*ノルムを入れて完備化したものである：

$$X \in \mathfrak{A}^G : \quad g \in G \longrightarrow X(g) \in \mathfrak{A},$$

$$\int \| X(g) \| d\mu(g) < \infty \qquad (\mu：左側不変測度)$$

$$(X * Y)(g) = \int X(s)\, \tau_s\, Y(s^{-1}g)\, d\mu(g)$$

$$X^*(g) = \tau_g\, X(g^{-1})^* \, (d\mu(g^{-1}) / d\mu(g))$$

定理16　0表現を含まない共変表現(π, U)と共変C^*環$\mathfrak{A}^G$の0表現を含まない表現の間に，次式により一対一対応が存在する。このとき$\hat{\pi}(\mathfrak{A}^G)'' = \mathcal{R}$である。

$$\hat{\pi}(X)\Psi = \int \pi(X(g))\, U(g)\, \Psi\, d\mu(g) \qquad (\forall \Psi \in H)$$

§3　エルゴード状態と分解定理

3.1　エルゴード状態

定理17　$\varphi \in \mathfrak{S}_0$が$G$可換なら，$\varphi$に対する次の条件は，たがいに同値である。

(1) φ は $\mathfrak{G}_0$ の端点（<u>エルゴード状態</u>）

(2) $\mathfrak{R}$ が H_φ で既約（$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{R}$ がファクターである）。

(3) $\dim E^0 H_\varphi = 1$（すなわち，$U_\varphi(g)\Psi = \Psi,\ \forall g \in G \Rightarrow \Psi = c\Omega_\varphi$）。

<u>注意</u> (3)→(2)$\Leftrightarrow$(1) は G 可換の仮定なしに成立。前項の定理を使って，いろいろの条件のもとで，$\mathfrak{R}$ をいろいろに書き変えると，上記と等価な違った形の条件がいろいろ得られる。それは一々書かないことにする。

<u>定理18</u> τ が $\varphi \in \mathfrak{G}_0$ で大きければ，φ に対する次の条件は，上記条件と同等である。

(4) $(\Omega_\varphi,\ \gamma(A)\pi_\varphi(B)\Omega_\varphi) = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A})$

(4)′ $\gamma(A) = \varphi(A)\cdot 1 \quad (\forall A \in \mathfrak{A})$

<u>定理19</u> $\varphi \in \mathfrak{G}_0$ が M可換なら，次の条件は (1) と同等。

(5) $M\{\varphi(A^* \tau_g A) - |\varphi(A)|^2\} = 0 \quad (\forall A \in \mathfrak{A})$

(5)′ $M\{\varphi(A\tau_g B)\} = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A})$

(5)″ $M_1(\pi_\varphi(\tau_g A)) = \varphi(A)\cdot 1 \quad (\forall A \in \mathfrak{A})$

<u>定理20</u> $\varphi \in \mathfrak{G}_0$ が η 可換なら，次の条件も (1) と同等。

(6) $(\Omega_\varphi,\ \pi_\varphi(A^*)\, m_\eta(A)\, \Omega_\varphi) = |\varphi(A)|^2 \quad (\forall A \in \mathfrak{A})$

(6)′ $\eta\{\varphi(A\tau_g B)\} = \varphi(A)\varphi(B) \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A})$

(6)″ $m_\eta(A) = \varphi(A)1$ $\qquad (\forall A \in \mathfrak{A})$

注意 (4), (5)′, (6)′ の条件は，弱クラスター性といわれる。τ が漸近可換で，$\pi(\mathfrak{A})''$ がファクターならば，次の強クラスター性が成立する。

$$\lim_{g\to\infty} \varphi(A\tau_g B) = \varphi(A)\varphi(B) \qquad (\forall A, B \in \mathfrak{A})$$

$$w\text{-}\lim_{g\to\infty} \pi_\varphi(\tau_g A) = \varphi(A)\cdot 1 \qquad (\forall A \in \mathfrak{A})$$

3.2 分解定理

$\mathfrak{S}_0$（弱＊コンパクト）の上の測度全体に

$\mu_1 \leq \mu_2 \Longleftrightarrow \mu_1(f) \leq \mu_2(f)$，$f$ は任意の連続凸関数により順序を入れる。点測度 δ_φ（$\delta_\varphi(f) = f(\varphi)$）に対し

$$\delta_\varphi \leqq \mu \implies \varphi(A) = \int \xi(A)\, d\mu(\xi)$$

もし測度 μ が $\mathfrak{S}_0$ の端点集合の中に台を持てば，上記は φ の端点状態（エルゴード状態）への積分分解になる。そこでそのような分解が存在し一意的かが問題となる。

μ の台 ⊂ 端点集合 ⟹ μ は極大（$\mu \leqq \mu' \Rightarrow \mu' = \mu$）

そこで，$\delta_\varphi \leqq \mu$ をみたす極大な μ が存在し一意的かを問題にする。

任意の $\varphi \in \mathfrak{S}_0$ に対し，$\delta_\varphi \leqq \mu$ なる極大な μ が一意的のとき，$\mathfrak{S}_0$ は単体であるという。たとえば，さらに $\mathfrak{S}_0$ の境界が閉じていれば，μ の台は端点集合に含まれる。

定理22

(1) $1\in\mathfrak{A}$ で τ が G 可換なら $\mathfrak{S}_0$ は単体である。

(2) τ が大きくて, $\mathfrak{S}_0\neq\phi$ なら, $\mathfrak{S}_0$ は単体である。

定理23

(1) $\mathfrak{A}$ が可分, $\varphi\in\mathfrak{S}_0$ が G 可換なら, $E^0\pi_\varphi(\mathfrak{A})E^0$ で生成される可分可換 C^*環に関する状態 φ の端点分解 $\varphi=\int x\,d\mu(x)$ により, φ の $\mathfrak{S}_0$ における端点分解

$$\varphi(A)=\int x(E^0AE^0)\,d\mu(x)$$

が与えられる。

(2) $1\in\mathfrak{A}$, τ が G 可換, $\mathfrak{A}_\alpha\subset\mathfrak{A}$ が可附番個の C^*環で, $\bigcup_\alpha\mathfrak{A}_\alpha$ が $\mathfrak{A}$ で稠密, $\mathfrak{J}_\alpha$ が $\mathfrak{A}_\alpha$ の可分閉両側イデアル, F_α は $\varphi\in\mathfrak{S}$ のうち $\varphi|\mathfrak{J}_\alpha$ がノルム1のもの全体, $F=\bigcap_\alpha F_\alpha$, $F^0=F\cap\mathfrak{S}_0$ とする。このとき積分分解

$$\varphi(A)=\int x(A)\,d\mu(x)$$

において, μ の台は $\mathfrak{S}_0$ の端点と $\mathbf{F}$ の共通部分に含まれる。

[第二段はこの形で具体的な応用例がある。]

注意 $\delta_\varphi\leqq\mu$ をみたす極大測度 μ は

$$\mu(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n)=(\Omega_\varphi,\ E^0\pi_\varphi(A_1)E^0\cdots E^0\pi_\varphi(A_n)E^0\Omega_\varphi)$$

で決定される。ただし $\hat{A}$ は $\mathfrak{S}_0$ 上の関数 $\hat{A}(\psi)\equiv\psi(A)$ であり, $\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n$ は n 個の関数 $\hat{A}_j(\psi)$ の積である。

定理24 $\mathfrak{S}_0$が単体で，その端点集合が閉じているためには，ある可換C^*環$\mathcal{B}$と，$\mathfrak{A}$から$\mathcal{B}$への写像ζで次の性質をみたすものの存在が必要十分である．ζは線形，正，$\tau(G)$不変，$\zeta(1)=1$，$\zeta(\mathfrak{A})$はノルムで$\mathfrak{A}$の中で稠密，$\psi\in\mathfrak{S}(\mathcal{B})$から$\psi\circ\zeta\in\mathfrak{S}_0$への写像が$\mathfrak{S}_0$の上への写像である。ただし，$\mathfrak{S}(\mathcal{B})$は$\mathcal{B}$の状態全体。このとき$\mathcal{B}$は同型対応を除いて一意的。

注意 Gとして$\mathfrak{A}$のユニタリ作用素全体，τとして内部自己同型をとると，τは大きくて，$\mathfrak{S}_0$は規格化されたトレース全体になる。このときの分解はファクタートレースへの分解である。

3.3 部分群に関する分解と弱mixing性

定理25 $\varphi\in\mathfrak{S}_0$がM可換のとき，φに対する次の条件は同値である。

(1) $\dim E^F = 1$ （E^Fは§1.2に定義）。

(2) $M\{|\varphi(A^*\tau_g A)-|\varphi(A)|^2|\}=0$ $\quad(\forall A\in\mathfrak{A})$。

(3) $M\{|(\Phi_1,\pi_\varphi(\tau_g A)\Phi_2)-\varphi(A)(\Phi_1,\Phi_2)|\}=0$ $\quad(\forall A\in\mathfrak{A},\Phi_1,\Phi_2\in H)$。

このような状態を弱mixing状態という。

定理26 $\varphi\in\mathfrak{S}_0$がM可換でエルゴード状態とする，

$$M^\sigma_{ab}(A)\equiv M_{f^*}(A),\qquad f(g)=(a,U^\sigma(g)b)$$

$a, b \in H^{\sigma}$, $A \in \mathfrak{A}$

とおくと，

$$U_{\varphi}(g) M^{\sigma}_{ab}(A) U_{\varphi}(g)^{-1} = M^{\sigma}_{a'b}(A), \quad a' = U^{\sigma}(g)a$$
$$M^{\sigma}_{a,b}(A)\Omega_{\varphi} \subset H^{\sigma} \otimes H'^{\sigma}$$

定理27　$\mathfrak{A}$が弱漸近可換，Gが非コンパクト，(π, U)が共変表現，NはUに含まれるすべての有限次元表現U^{σ}に対し$U^{\sigma}(g)=1$となるgの作るGの部分群，$\mathfrak{G}=G/N$がコンパクトまたは連結とする。このとき$E^{F}\pi(A)E^{F}$ $(A \in \mathfrak{A})$は可換である。

定義　$\mathfrak{A}$が弱漸近可換，$\varphi \in \mathfrak{S}_0$がエルゴード状態，$(\pi_{\varphi}, U_{\varphi})$に関する前定理の$N, \mathfrak{G}$を$N_{\varphi}, \mathfrak{G}_{\varphi}$と書く。

(1)　φがE_{I}状態とは，定理25の条件がみたされているとき。すなわち$N_{\varphi}=G$のとき。

(2)　φがE_{II}状態とは$N_{\varphi} \neq G$で，$\mathfrak{G}_{\varphi}$がコンパクトのとき。

(3)　φがE_{III}状態とは$\mathfrak{G}_{\varphi}$が非コンパクトのとき。

定理28　位相群Gの閉不変部分群Hに対しG/HがコンパクトでG不変測度dgをもつものとする。$\int_{G/H} dg = 1$とする。さらに$\mathfrak{A}$が連続で，$\varphi \in \mathfrak{S}_0$がエルゴード状態とする。そのとき$\mathfrak{A}$のH不変状態全体$\mathfrak{S}^{H}_0$の端点集合の中に台をもつ測度$\mu$で$\mu \geq \delta_{\varphi}$となるものが存在する。さらに$\mathfrak{S}^{H}_0$の端点$\tilde{\varphi}_H$が

存在して,

$$\mu(\psi)=\int_{G/H} dg\, \psi(\tau_g{}^* \tilde{\varphi}_H) \qquad (\forall\psi\in\mathcal{C}(\mathfrak{S}_0^H))$$

特に,

$$\varphi(A)=\int_{G/H} dg\, \tilde{\varphi}_H(\tau_g^{-1}A) \qquad (\forall A\in\mathfrak{A})$$

τ が漸近可換ならこの分解は一意的で, $\tilde{\varphi}_H$ は τ_g^* での変換を除いて一意的にきまる。

φ が E_I 状態なら, $\tilde{\varphi}_H=\varphi$, φ が E_{II} 状態のとき, $H=N_\varphi$ にとれば, $\tilde{\varphi}_H$ は N_φ について E_I 状態であり, 任意の H については

$$\tilde{\varphi}_H(A)=\int_{H/(H\cap N_\varphi)} dg\ \tilde{\varphi}_{N_\varphi}(\tau_g^{-1}A)$$

定理29 (スペクトルの性質)

(1) τ がM可換で $\varphi\in\mathfrak{S}_0$ がエルゴード状態のとき, $U^\sigma, U^{\sigma'}$ が U_φ に含まれていれば $U^\sigma\otimes U^{\sigma'}$ は U と *disjoint* ではない。また $U^{\bar{\sigma}}$ も U に含まれる。($\bar{\sigma}$ は σ に複素共軛な表現)

(2) 定理28の場合, φ が E_{II} 状態なら E^F における G の表現は $\mathcal{G}_\varphi$ の正則表現である。

注意 $E^F H_\varphi=\{\psi\in H_\varphi,\ U_g\psi=\psi\quad(\forall g\in N_\varphi)\}$ (φ は E_{II} 状態)

3.4 概周期状態

$\mathcal{B}$: バーナッハ空間

$\mathbb{G}_\pi$：$\mathcal{B}$の *isometry* の作るある群

$AP(\mathcal{B})$：概周期元の全体．すなわち $x\in\mathcal{B}$ で $\{gx, g\in\mathbb{G}_\pi\}$ がノルム位相で條件的コンパクトなもの全体．($i.e$ $\overline{\mathbb{G}_\pi x}$ が $\mathcal{B}$ でコンパクト．) $\mathcal{B}$のG不変閉部分空間

$\mathcal{B}=H$（ヒルベルト空間）

$$\Psi\in AP(H)\Leftrightarrow(\Psi, U(g)\Psi)\in AP(\mathbb{G}_\pi)\ (\equiv AP(\mathcal{C}(\mathbb{G}_\pi)))$$
$$\Leftrightarrow(\Psi, U(g)\Psi)\in AP(\mathbb{G}_\pi)$$
$$\Leftrightarrow\ \Psi\in E^F H$$

$\mathcal{B}=\mathfrak{A}^*$，$\mathbb{G}=\tau(G)^*$ のとき $\mathfrak{S}\cap AP(\mathfrak{A}^*)$ の元を概周期状態という。

定理30　Gが局所コンパクト可換群，τが弱漸近可換，φを概周期状態とすると，$\mathfrak{S}$上の測度のうち $\mu'=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta_{\varphi_i}$, $N>\infty$, $\alpha_i\geq 0$，$\Sigma\alpha_i=1$，$\Sigma\alpha_i\varphi_i=\varphi$，$\varphi_i$は概周期的，のような$\mu'$で弱＊位相で近似できる測度には，一意的に極大測度$\mu_\varphi$が存在する。

§4　その他

定理31　$\varphi\in\mathfrak{S}_0$が大きくて，$R\equiv\pi_\varphi(\mathfrak{A})''$がファクターとする．このとき次のいずれかが成立する．

(1) R はIII型 $\Longleftrightarrow$ R' が有限型でない。

(2) R が有限型 $\Longleftrightarrow$ φ がトレースを与える。

（このとき coupling は1）

(3) R が I_∞ または II_∞ 型 $\Longleftrightarrow$ R' が有限型で φ はトレースでない。

$G=\mathbb{R}$ の場合，ある解析関数 $F_{AB}(Z)$ で $\varphi(A\tau_t B)=F(t)$，$\varphi((\tau_t B),A)=F(t+i\beta)$（$\beta$ は定数）となるものが，任意の $A, B\in\mathfrak{A}$ に対し存在するような $\varphi\in G_0$ は，KMS条件をみたすという。このような φ についていくつかの事実が知られている。また $U_\varphi(t)=e^{iHt}$ と書いたときの H が下に有界のような表現は，上記の $\beta\to\infty$ の極限とも考えられ，それについても特殊な性質が知られている。$\beta=0$ ならトレース状態である。

文　献

S. Doplicher, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 1-28.

D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 133-150.

D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 151-180.

D. Ruelle and D. W. Robinson, Ann. Inst. H. Poincaré, "Extremal Invariant States".

O. E. Lanford and D. Ruelle, J. M. P. 8 (1967), 1460-1463.

E. Størmer, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.

S. Doplicher, R. V. Kadison, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 101-120.

S. Doplicher and D. Kastler, Commun. Math. Phys. 7 (1968), 1-20.

D. Ruelle, Almost periodic states on C*-algebras.

E. Størmer, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 194-204.

N. M. Hugenholtz, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 189-193.